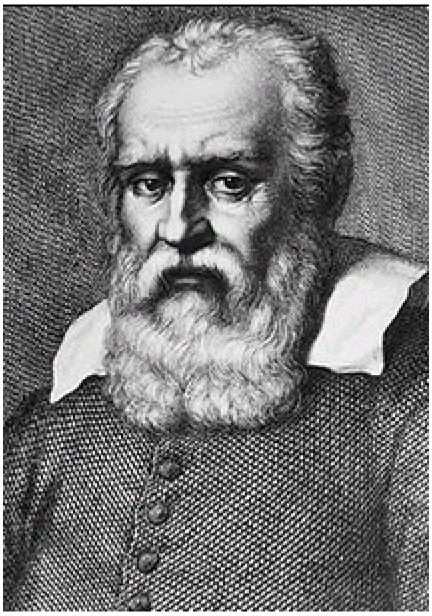
1. Mai 2000

Bestimmung der Erdbeschleunigung g

PG 268

Tutorin: Cornelia Sing



Galileo Galilei

Teilnehmer:

Daniel Guyot
Diana Bednarczyk
Fabian Fleischer
Heinrich Südmeyer
Inkje Döring
Ramin Torabi
René Könnecke

Abstract

Bestimmung der Erdbeschleunigung g an der Erdoberfläche mit Hilfe eines Fadenpendels, wobei die Schwingungsanzahl des Pendels mit einer Lichtschranke gezählt wurde. Ab einer gewissen Schwingungszahl wurde die Zeit der Schwingung per Stoppuhr ermittelt. Nachdem die Gruppe mehrere Versuche durchgeführt hatte, bei denen sie sowohl die Pendellänge als auch den Auslenkungswinkel variierten, wurde die Erdbeschleunigung g aus den ermittelten Zeitwerten errechnet.

Inhaltsangabe

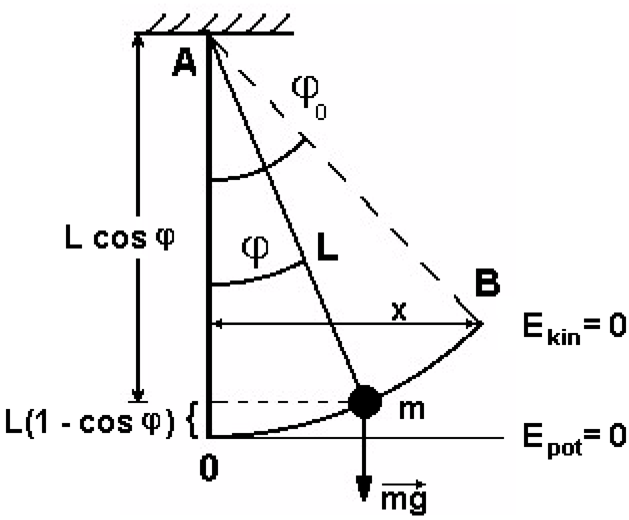
1. **Einleitung**

Die ersten Untersuchungen, die sich mit dem Pendel befassen stammen von *Galileo Galilei (1564 – 1642)*. Er veröffentlichte anno 1638 seinen „Discorsi e Demonstrazioni matematiche intorno a due nouve scienzi“ (Dialog und mathematische Demonstration über zwei neue Wissenschaften). Unter zwei Wissenschaften verstand *Galilei* die von ihm neu bearbeitete Bewegungslehre (Dynamik) und die Lehre über die Festigkeit der Körper (Mechanik). Der sogenannte Discorsi beinhaltete unter anderem auch das nach Galilei benannte Pendelgesetz

$$T = 2\pi\sqrt{L/g}\,.$$

Damit stellte *Galilei* fest, dass die Schwingungsdauer T unabhängig von der Masse des Pendelköruers und in seiner groben Näherung auch von der Auslenkung des Pendels um einen Winkel φ. Die Zeit einer Schwingung T ist eine Funktion der Pendellänge L und der Erdbeschleunigung g.
Für die Projektgruppe 268 handelte es sich um den zweiten der beiden zum Studienbeginn vorgeschlagenen Versuche. Die Gruppe teilte sich in Teams und führte zwei thematisch und messtechnisch identische Versuche mit jeweils unterschiedlicher Fadenlänge durch.

2. Theorie



Wir betrachten den Zusammenhang zwischen Auslenkung und Schwingungsdauer T mit Hilfe eines mathematischen Pendels, welches aus einem Pendelkörper der Masse m und einem Draht bzw. Faden der Länge L besteht.
Das mathematisches Pendel besitzt eine punktförmige Masse und einen gewichtslosen Faden.
Daher wählt man die Masse m' des Drahtes klein zur Masse m des Pendels und den Durchmesser d des Pendelkörpers klein zur Länge L des Drahtes, um die Konstruktion einem mathematischen Pendel weitmöglichst anzunähern.

Wir bestimmen die Erdbeschleunigung g durch Integration der Schwingungsgleichung mit Hilfe des Energiesatzes, um durch die Reihenentwicklung eine Korrektur des Messwertes für Winkel φ größer 5° zu erhalten.

$$E_{pot} = m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot L(1-\cos\varphi(t))$$

$$E_{kin} = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}L^2\dot{\varphi}^2$$

Die konstante Gesamtenergie ist

$$E_{ges} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{m}{2}L^2\dot{\varphi}^2 + mgL(1-\cos\varphi(t)) = mgL(1-\cos\varphi_0),$$

wobei φ_0 der Winkel beim Umkehrpunkt B ist, in dem gilt: $E_{kin} = 0$.

Durch Kürzen von m und L ergibt sich

$$\frac{1}{2}L\dot{\varphi}^2 + g(1-\cos\varphi(t)) = g(1-\cos\varphi_0)$$

$$\Leftrightarrow \dot{\varphi} = \sqrt{2\frac{g}{L}[(1-\cos\varphi_0)-(1-\cos\varphi(t))]}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{2\frac{g}{L}[\cos\varphi_0 - \cos\varphi(t)]}$$

$$\Leftrightarrow dt = \sqrt{\frac{L}{2g}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi(t)-\cos\varphi_0}}$$

woraus man durch Integration

$$\sqrt{\frac{L}{2g}}\int_{\varphi=0}^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi(t)-\cos\varphi_0}} = \int_{t=0}^{T/4} dt = T/4$$

$$\Leftrightarrow T = \sqrt{\frac{8L}{g}}\int_{\varphi=0}^{\varphi_0}\frac{1}{\sqrt{\cos\varphi(t)-\cos\varphi_0}}\,d\varphi$$

erhält.

Nach Demtröder, Experimentalphysik 1, Mechanik und Wärme, Seite 73 ergibt sich aus Reihenentwicklung für größere Winkel

$$T(\varphi_0) = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1+\frac{1}{16}\varphi_0^{\,2}+\ldots\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{T(\varphi_0)}{2\pi\left(1+\frac{1}{16}\varphi_0^{\,2}+\ldots\right)} = \sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$\Leftrightarrow g = \frac{4\pi^2\left(1+\frac{1}{16}\varphi_0^{\,2}+\ldots\right)^2}{T^2(\varphi_0)}\cdot L,$$

wobei L, T und x gemessen werden und φ_0 sich ergibt aus

$$\sin\varphi_0 = \frac{x}{L} \approx \varphi_0$$

für kleine Winkel φ_0 ($\varphi_0 < 5°$).

$$\Rightarrow g = \frac{4\pi^2\left(1+\frac{x^2}{16L^2}+\ldots\right)^2}{T^2(\varphi_0)}\cdot L$$

Da nur kleine Winkel φ_0 betrachtet werden, gilt auch *Galilei*s Näherung

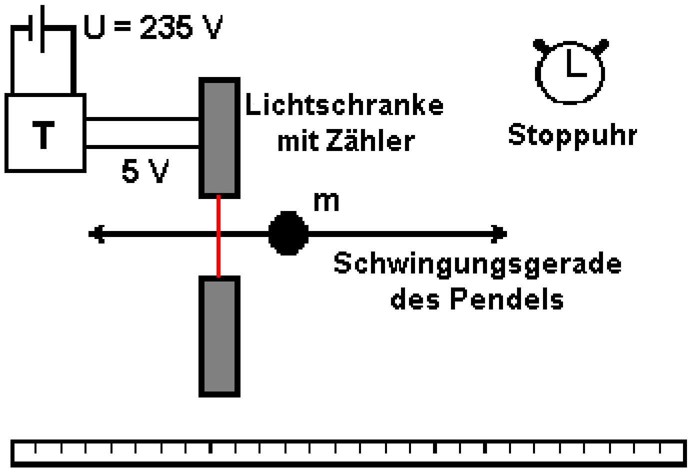
$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}.$$

Aufbau

3.1 Materialliste

Stoppuhr	PL 823 b
Pendelkörper (200g u. 6,85kg)	PL 826 a
Draht u. Faden	PL 401 a
Lichtschranke mit Zähler	PL 043 b
Maßband	PL 823 a
Zählgerät	PL 042 a
Transformator	PL 013 b

3.2 Versuchsaufbau



Aus Pendelkörper und Draht bzw. Faden wurden zwei Pendel konstruiert. Diese wurden an hohen Punkten aufgehangen.
Eines mit einer Länge von 33,15 m wurde mittels Halterungsstange und Schraubzwingen im siebten Stock des Physik-Neubaus befestigt. Das zweite mit einer Länge von 11,21 m ließ sich im Bunker des selben Gebäudes über einen Dachbalken führen und am Geländer befestigen. Bei letzterem Aufbau wurde noch ein Holzklotz mit eingefeilter Drahtführung benutzt, um die Lagerung des schwingenden Drahtes auf einer Kante zu erreichen, wodurch eine möglichst geringe Reibung gewährleistet wurde.
Am Pendelende wurde die Lichtschranke in der Schwingungsgerade positioniert, jeweils mit integriertem bzw. externem Zähler. Die Zeitintervallmessung erfolgte beim längeren Pendel durch ein an die Lichtschranke angeschlossenes Messgerät, bzw. durch eine Stoppuhr beim kürzeren.

4. Durchführung & Auswertung

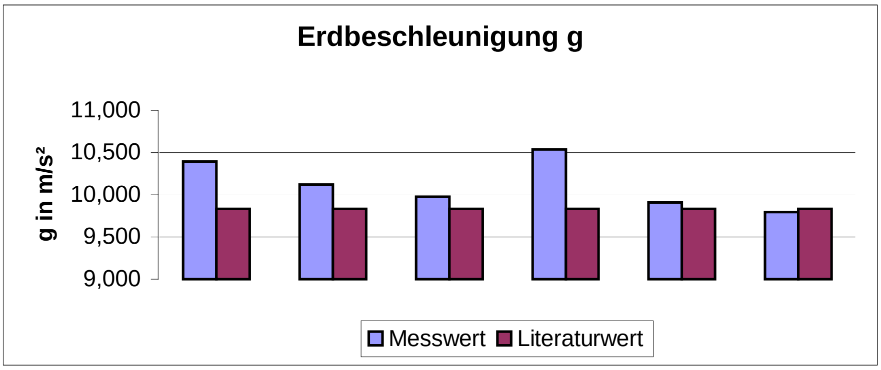
4.1 Durchführung

Das Pendel wurde an seinem Ende um die Strecke $\boldsymbol{x}$, gemessen am Maßband, so ausgelenkt, dass es beim Schwingen die Lichtschranke passierte. Bei der ersten Unterbrechung der Lichtschranke wurde die Stoppuhr gestartet. Die Unterbrechungen der Lichtschranke wurden vom Zähler gezählt. Nach einer bestimmten Zahl an Schwingungsperioden des Pendels, die sich aus Unterbrechungen / 2 ergab, wurde die Zeitintervallsmessung gestoppt.
Nach der letzten Schwingungsmessung wurden die Längen der jeweiligen Pendel ausgemessen.

4.2 Auswertung

g	Pendellänge ***L*** in m	Auslenkung ***x*** in m	Perioden	ges. Schw.dauer in s	***T*** in s	g in m/s²
	11,21	0,25	50	326,2	6,52	10,398
	11,21	0,50	50	330,6	6,61	10,123
	11,21	0,75	50	333,0	6,66	9,977
	11,21	1,00	50	324,0	6,48	10,539
	11,21	4,70 ($f_0 > 20°$)	10	67,6	6,76	9,912
	33,15	0,225	200	2312	11,56	9,793
					0,4326	

Literaturwert: $g_{Berlin} = 9{,}81\ m/s^2$



Zur Auswertung wurden die einzelnen Messwerte der gesamten Schwingungsdauer durch die durchlaufenden Perioden geteilt und so die Periodendauer $\boldsymbol{T}$ ermittelt.
$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{T}$ und $\boldsymbol{L}$ wurden dann in die Bestimmungsgleichung für $\boldsymbol{g}$ eingesetzt und die Erdbeschleunigung daraus bestimmt:

$$g_6 = \frac{4\pi^2 L_6}{T_6{}^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 33{,}15m}{(11{,}56s)^2} = 9{,}793\frac{m}{s^2}.$$

4.3 Fehlerrechnung

Mittelwert:

Pendel 1 (L = 11,21 m) :

$$\overline{g_{P1}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g_i = 10{,}19\,\frac{m}{s^2}$$

Pendel 2 (L = 33,15 m) :

$$\overline{g_{P2}} = 9{,}79\,\frac{m}{s^2}$$

Standardabweichung:

Pendel 1:

$$\Delta g_{P1stat.} = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\overline{g_{P1}} - g_i\right)^2} = 0{,}12\,\frac{m}{s^2}$$

$$\Delta g_{P1syst.} = \sqrt{\left(\frac{\Delta L}{L}\cdot 1\right)^2 + \left(\frac{\Delta T}{T}\cdot(-2)\right)^2} \cdot \overline{g_{P1}} = \sqrt{\left(\frac{0{,}05m}{11{,}21m}\cdot 1\right)^2 + \left(\frac{0{,}5s}{6{,}6s}\cdot(-2)\right)^2} \cdot 10{,}19\,\frac{m}{s^2} = 1{,}5\,\frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow \Delta g_{P1ges.} = \sqrt{\Delta g_{P1stat.}{}^2 + \Delta g_{P1syst.}{}^2} = 1{,}5\,\frac{m}{s^2}$$

Pendel 2:

$$\Delta g_{P2stat.} = 0$$

$$\Delta g_{P1syst.} = \sqrt{\left(\frac{\Delta L}{L}\cdot 1\right)^2 + \left(\frac{\Delta T}{T}\cdot(-2)\right)^2} \cdot \overline{g_{P2}} = \sqrt{\left(\frac{0{,}05m}{33{,}15m}\cdot 1\right)^2 + \left(\frac{0{,}1s}{11{,}56s}\cdot(-2)\right)^2} \cdot 9{,}79\,\frac{m}{s^2} = 0{,}17\,\frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow \Delta g_{P1ges.} = \sqrt{\Delta g_{P1stat.}{}^2 + \Delta g_{P1syst.}{}^2} = 0{,}17\,\frac{m}{s^2}$$

gewichtetes Mittel:

$$\overline{g} = \frac{\dfrac{\overline{g_{P1}}}{\Delta g_{P1}{}^2} + \dfrac{\overline{g_{P2}}}{\Delta g_{P2}{}^2}}{\dfrac{1}{\Delta g_{P1}{}^2} + \dfrac{1}{\Delta g_{P2}{}^2}} = 9{,}80\,\frac{m}{s^2}$$

Fehler des gewichteten Mittels:

$$\Delta g = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{\Delta g_{P1}{}^2} + \dfrac{1}{\Delta g_{P2}{}^2}}} = 0{,}17\,\frac{m}{s^2}$$

relativer Fehler:

$$\frac{\Delta g}{\overline{g}} = 1{,}7\%$$

Folgende Fehler könnten im Rahmen des Versuchs aufgetreten sein:

- Fehlmessung der Pendellänge inklusive Ungenauigkeit des Maßbands ($\pm$ 0,05 m)
- Ablesefehler von analog anzeigenden Zeitmessinstrumenten ($\pm$ 0,1 s)
- Reaktionszeit beim Messen der Zeit mit der Stoppuhr (+ 0,5 s)

Wie die Fehlerrechnung zeigt, überwiegt der systematische Fehler beim Pendel 1 den statistischen Fehler bei Weitem.
Durch Bilden des gewichteten Mittels und dessen Fehler wurde versucht, diese Mess-Ungenauigkeiten weitgehendst zu kompensieren.

5. Zusammenfassung & Diskussion

Ziel war die Bestimmung der Erdbeschleunigung ***g***. Der erhaltende Wert $\bar{g}$ ***= 9,80 m/s²*** weicht um 0,1 % vom Literaturwert für Berlin ab und liegt somit innerhalb der Fehlergrenze.
Die Zielsetzung ist als sinnvoll zu erachten, da das Versuchsziel erreicht wurde.
An den Messmethoden gab es nichts auszusetzen. Zur Verbesserung der Messergebnisse wäre es sinnvoll, ein längeres Pendel zu verwenden, um den Winkel φ_0 kleinstmöglich zu halten und die Auswertung zu verbessern. Auch ist das Versuchsgebiet nach Möglichkeit so zu wählen, dass Störungen von nicht am Versuch beteiligten Personen ausbleiben.

6. Literaturverzeichnis

W. Demtröder, *Experimentalphysik 1. Mechanik und Wärme*, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg 1994
J. Hemleben, *Galileo Galilei*, Rowohlt-Bildmonographie Nr. 156, Rowohlt-Verlag
Bartsch, *Taschenbuch Mathematischer Formeln*, Fachbuchverlag Leibzig, 18. Auflage